

# 实验6: 线性方程组的迭代解法

计52 路橙 2015010137

## 实验要求

### 实验题目

考虑常微分方程的两点边值问题，可构建出一个系数矩阵：

$$A = \begin{bmatrix} -(2\epsilon + h) & \epsilon + h & & & \\ \epsilon & -(2\epsilon + h) & \epsilon + h & & \\ & \epsilon & -(2\epsilon + h) & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \epsilon + h \\ & & & \epsilon & -(2\epsilon + h) \end{bmatrix}$$

而

$$b = [ah^2, ah^2, \dots, ah^2]^T$$

分别使用 Jacobi 法、Gauss-Seidel 法和 SOR 法求解上述线性方程的解。要求4位有效数字，然后比较其与精确解的误差。

### 初始数据

$\epsilon = 1$ ,  $a = \frac{1}{2}$ ,  $n = 100$ ,  $h = \frac{1}{n} = 0.01$ 。

### 算法描述

- 构建A矩阵和对应的B矩阵.
- Jacobi方法中，每轮迭代的公式为:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j^{(k)}}{a_{ii}}$$

- Gauss-Seidel方法中，每轮迭代的公式为:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)}}{a_{ii}}$$

- SOR方法中，每轮迭代的公式为:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \omega \left( \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^n a_{ij} x_j^{(k)}}{a_{ii}} \right)$$

本次实验中，取 $\omega = 0.5$ 。

## 程序清单说明

---

`6.cpp` 为所有的程序，包含了三种算法以及初始矩阵的建立。

## 运行结果与分析

---

程序运行结果见 `6.txt`。迭代次数为100万次。

分析如下：

- $\epsilon = 1$ 时，三种方法的误差都较大。而当 $\epsilon$ 取更小的值时，可以得到更精确的结果。特别地，当 $\epsilon$ 取值为0.001时可以得到十分精确的结果。
- 将迭代次数减少时：
  - 减少到1万次，`jacobi` 方法失效；
  - 减少到7000次，只有 `Gauss-Seidel` 方法可以得到正确的结果。

由此可以得到，在这种问题下，`Gauss-Seidel` 方法的鲁棒性更强，收敛速度更快。

而对于 $\omega = 0.5$ 的 `SOR` 方法而言，效果并不如 `Gauss-Seidel`。

## 体会与展望

---

- `Gauss-Seidel` 方法对于此类问题的效果最明显。收敛速度、精确度都最高。
- 对于稀疏矩阵而言，使用这三种方法可以极大地降低运算复杂度，相对于高斯消元法而言，可以极大地提高大规模计算的效率。
- 这三种方法并不是万能的，当 $\epsilon$ 取值较小时，算法并不能很好地收敛。